Húrrezgések megfigyelési problémáinak vizsgálata

Doktori értekezés tézisei

Szijártó András Lajos

Témavezető:

Dr. Móricz Ferenc

professzor emeritus

Konzulens:

Dr. Hegedűs Jenő

egyetemi docens

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Szegedi Tudományegyetem

Természettudományi és Informatikai Kar

Bolyai Intézet

Szeged

2016

1. Bevezetés

A disszertáció húrrezgésekkel kapcsolatos megfigyelési problémák megoldhatóságával, illetve a megoldások simaságával foglalkozik.

A megfigyelési problémák eredete az irányításelmélet témakörébe nyúlik vissza, mely kiterjedt szakirodalommal rendelkezik, és ahol változatos kontrollfeltételek mellett sikerült meghatározni egy adott rendszer kezdőállapotát.

Az általunk vizsgált megfigyelési problémák kitűzése a következő: két időpontban ismerjük (megfigyeljük) a rezgő húr részleges állapotát, és ez alapján kíséreljük meg leírni a teljes rezgést, vagy legalább megadni a húr olyan kezdeti pozícióját és sebességét, melyből indulva a megfigyelt állapotok előállnak. Ilyen kitűzésű problémák vizsgálata egészen új keletű, az általunk tekintett problémákhoz a [3] cikk kitűzése áll legközelebb, melyben L. N. Znamenskaya a standard véges húr rezgéseihez kapcsolódó megfigyelési problémát vizsgálta homogén peremfeltételek mellett. Ezenkívül az értekezés témájához hasonló további munkák a [4], [5] és [6] dolgozatok, amelyek rezgő rudakkal, lemezekkel és membránokkal kapcsolatos megfigyelési problémákat tárgyalnak.

A disszertáció 2. fejezetében általánosított függvények körében kitűzött megfigyelési problémákat vizsgálunk. Vizsgálódásaink kiindulópontja a Klein-Gordon egyenlet által leírt rezgés, de később az ehhez kapcsolódó eredményt sikerült általánosítanunk mind a rezgést leíró egyenletet, mind a peremfeltételeket, mind a megfigyelt állapotokat tekintve.

A 3. fejezet a végtelen rezgő húrra vonatkozó Duhamel-elvet általánosítja. Ez az eredmény a következő fejezetbeli állítások minél élesebb megfogalmazása céljából született, de akár önmagában is érdeklődésre tarthat számot.

A 4. fejezet a végtelen rezgő húr megfigyelési problémájával foglalkozik, a klasszikus tárgyalásmódra támaszkodva. Eredményünkből a tükrözések módszerének segítségével félvégtelen húrok megfigyelhetőségére is tudunk következtetni.

A disszertáció a szerző [7]–[10] publikációin alapul. A tézisfüzetben használt jelölések, továbbá az egyenletek és tételek számozásai (az irodalomjegyzéket kivéve) megegyeznek az értekezésben használtakkal.

2. Húrrezgések megfigyelési problémái általánosított függvények körében

Az ebben a fejezetben használt általánosított függvények az alábbi, [1]-ben megtalálható $D^s(S)$, $s \in \mathbb{R}$ terekből származnak.

Legyen adva egy $\{X_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ teljes ortonormált bázis az $L_2(S)$ térben. Tetszőleges valós s szám esetén tekintsük az $X_n(x)$ függvények által kifeszített lineáris D alteret, ahol $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $x \in \overline{S}$. Tekintsük ezen a téren a következő euklideszi normát:

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} c_n X_n(x) \right\|_s := \left(\sum_{n=0}^{\infty} n^{2s} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Teljessé téve a D teret erre a normára nézve egy Hilbert teret kapunk, melyet D^s-sel jelölünk. A húrrezgésekkel kapcsolatban mi az $S = (0, l)$ intervallumot használjuk. A D^s terek tulajdonságairól a [2] könyvben található további információ.

A 2.1. Alfejezetben egy, a Klein-Gordon egyenlettel kapcsolatos egyszerűbb megfigyelési problémát vizsgálunk. Erre vonatkozó tételünk a következő:

2.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy adottak f_1, f_2 megfigyelt állapotok és t_1, t_2 megfigyelési időpontok úgy, hogy*

$$f_1 \in D^{s+2}, \quad f_2 \in D^{s+2}, \qquad s \in \mathbb{R},$$

és

$$t_2 - t_1 = \frac{p}{q}\frac{2l}{a}, \qquad p,\ q \in \mathbb{N},$$

ahol p és q relatív prímek. Továbbá tegyük fel, hogy

$$\sin\left((t_2 - t_1)\sqrt{\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 + c} \right) \neq 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor egyértelműen meghatározhatók olyan

$$(\varphi,\psi) = (u(x,0), u_t(x,0)) \in D^{s+1} \times D^s$$

kezdeti függvények, melyekkel indított

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) - cu(x,t), \qquad (x,t) \in [0,l] \times \mathbb{R}, \quad 0 < a, c \in \mathbb{R}.$$

egyenletű,

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

rögzítésű rezgő húr a t_1, t_2 időpontokban az

$$u(x,t_1) = f_1(x), \quad u(x,t_2) = f_2(x), \qquad 0 \le x \le l,$$

előírt pozíciókat veszi fel.

A bizonyítás konstruktív, a kezdeti függvények Fourier soros reprezentációja a bizonyításban megtalálható.

Hasonló állítás tehető azokra az esetekre, amikor a két időpontban tett megfigyelésünk egyszer a húr pozíciójára és egyszer a sebességére, illetve amikor mindkét időpontban a sebességére vonatkozik.

Kutatásunk során ezt az eredményt sikerült általánosítanunk, mely általánosítás a 2.2. Alfejezetben található meg és a következő megfigyelési problémát oldja meg:

Tekintsük a következő vegyes feladatot:

$$u_{tt} = (p(x)u_x)_x - q(x)u \equiv Lu, \qquad (x,t) \in [0,l] \times \mathbb{R}, \quad 0 < p, q \in C^\infty([0,l]), \tag{2.29}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \tag{2.30}$$

$$\mathcal{U}_i[u] \equiv \mathcal{U}_i(u|_{x=0},\ u|_{x=l},\ u_x|_{x=0},\ u_x|_{x=l}) = 0, \qquad i = 1,2, \tag{2.31}$$

ahol $\mathcal{U}_1,\ \mathcal{U}_2$ független, önadjungált lineáris kifejezések, az u, φ, ψ függvények a D^s általánosított függvénytérből származnak.

Tegyük fel, hogy bármely $s \in \mathbb{R}$ és bármely $(\varphi, \psi) \in D^{s+1}(0,l) \times D^s(0,l)$ esetén ez a vegyes feladat rendelkezik az alábbi jó tulajdonságokkal:

$$\exists!\, u \text{ megoldás és } u \in C(D^{s+1}, \mathbb{R}) \cap C^1(D^s, \mathbb{R}) \cap C^2(D^{s-1}, \mathbb{R}), \tag{2.33}$$

továbbá u felírható a következő alakban

$$\begin{gathered} u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_n \cos(\omega_n t) + \beta_n \sin(\omega_n t)\right] X_n(x), \quad (x,t) \in [0,l] \times \mathbb{R}, \\ L X_n = -\omega_n^2 X_n, \qquad \mathcal{U}_i X_n = 0, \quad i = 1{,}2. \end{gathered} \tag{2.34}$$

Megfigyelési feltételeink a t_1 és t_2 időpontokban a pozíció és sebesség valamely ismert, tetszőleges lineáris kombinációját tartalmazzák:

$$\begin{aligned} A_1 u|_{t=t_1} + B_1 u_t|_{t=t_1} &= f_1, \qquad |A_1| + |B_1| > 0, \\ A_2 u|_{t=t_2} + B_2 u_t|_{t=t_2} &= f_2, \qquad |A_2| + |B_2| > 0, \end{aligned} \tag{2.32}$$

ahol az $A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2 \in \mathbb{R}$ együtthatók és az $f_1,\ f_2$ függvények adottak.

Legyen

$$f_1 \in D^{s+2},\ f_2 \in D^{s+2}, \qquad s \in \mathbb{R}, \tag{2.35}$$

és tegyük fel, hogy léteznek $0 < A \in \mathbb{Q},\ B \in \mathbb{R},\ 0 < M_1 \in \mathbb{R}$ konstansok és $C_n \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ sorozat úgy, hogy

$$\begin{gathered} \omega_n(t_2 - t_1) + \gamma_n - \delta_n = n\pi A + B + C_n, \\ 0 < \frac{M_1}{n} < |C_n|,\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{és} \quad C_n \to 0 \text{ amint } n \to \infty, \end{gathered} \tag{2.36}$$

és

$$\sin(\omega_n(t_2 - t_1) + \gamma_n - \delta_n) \neq 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.37}$$

A 2.10. Lemmát a fentebbi szinuszfüggvény értékeinek megbecsülésére használjuk elég nagy n esetére:

2.10. Lemma *Legyen az r_n számsorozat olyan, hogy $0 < M/n < |r_n| \to 0$ valamely M pozitív valós konstanssal és legyen $x_0 > 0$ racionális szám. Ekkor bármely rögzített $d \in \mathbb{R}$ számra létezik egy N határszám, hogy*

$$|\sin(n\pi x_0 + d + r_n)| > \frac{M}{2n}, \qquad \forall n > N\text{-re.}$$

Ez a becslés biztosítja majd, hogy a keresett kezdeti függvények Fourier sorai konvergensek és a megköveteltnek megfelelő simaságú függvényeket állítanak elő.

A (2.36), (2.37) feltételekben szereplő γ_n, $\delta_n \in [0, 2\pi)$ szögek az alábbi egyenletek által egyértelműen meghatározottak:

$$\sin\gamma_n = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2\omega_n^2}}, \quad \cos\gamma_n = \frac{B_1\omega_n}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2\omega_n^2}},$$
$$\sin\delta_n = \frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2\omega_n^2}}, \quad \cos\delta_n = \frac{B_2\omega_n}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2\omega_n^2}}.$$

Állításunk (mely egyben a 2. fejezet fő eredménye) a következő:

2.11. Tétel. *Az itt vázolt* (2.29)–(2.37) *megfigyelési problémának létezik pontosan egy $(\varphi, \psi) \in D^{s+1} \times D^s$ megoldása, azaz egyértelműen meghatározhatóak azon kezdeti függvények, amikkel indított húrrezgés során a* (2.32) *feltétel által megadott megfigyelt állapotok előállnak.*

A 2.3. Alfejezetben a 2.11. Tétel alkalmazhatóságának illusztrálására megadunk három példát a Klein-Gordon egyenlet esetén, különböző peremfeltételek mellett. A 2.3.1. Szakaszban a rögzített végpontú, a 2.3.2. Szakaszban a szabad végpontú, a 2.3.3. Szakaszban a Sturm-Liouville rögzítésű húrt tekintjük. Ezen vizsgálatok során láthatjuk, hogy a 2.11. Tétel technikai jellegű feltételei konkrét példa esetén jelentősen egyszerűsödhetnek, vagy akár automatikusan teljesülhetnek. A 2.3.4. Szakaszban megnézzük mi történik, ha a t_1, t_2 megfigyelési időpontokra nem teszünk megszorításokat a 2.11. Tételben.

3. A Duhamel-elv egy változata végtelen rezgő húrra

A disszertáció 3. Fejezetében a Duhamel-elv egy új változatát mutatjuk be végtelen rezgő húr esetére, amely a következő:

3.1. Tétel. *Amennyiben $f(x,t) \in C(\mathbb{R}^2)$ és az f függvény t irány szerinti f_t deriváltja létezik, továbbá $f_t \in C(\mathbb{R}^2)$, akkor a*

$$v(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^2),$$

$$v_{tt}(x,t) - a^2 v_{xx}(x,t) = f(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

$$v|_{t=0} = v_t|_{t=0} \equiv 0$$

kezdeti érték problémának van megoldása. A megoldás egyértelmű és felírható a következő alakban:

$$v(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \left(\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\xi \right) d\tau, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

A szokásos kitűzés $f(x,t) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ simasági feltételét élesíti ez a tétel, és a v ezen reprezentációja megegyezik azzal, amit a szokásos kitűzés esetén kapunk. A bizonyítás alapja az, hogy az így definiált függvény értelmezve van és C^2-beli akkor is, ha csak az általunk tett enyhébb megkötéseket tesszük az f erőfüggvényre.

Megjegyzés. Megemlítjük még, hogy a 3.1. Tétel (és így az azt felhasználó 4. Fejezetbeli tételek is) igaz marad akkor is, ha

$$f(x,t) \in C(\mathbb{R}^2), \quad f_\nu(x,t) := \frac{\partial f}{\partial \nu} \in C(\mathbb{R}^2),$$

ahol f_ν az f függvénynek egy $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ irány szerinti deriváltja, feltéve, hogy ν transzverzális a karakterisztikákhoz. Ennek a bizonyítása hosszadalmas számolást igényel, ami számos részesetre bomlik a ν iránytól függően, ezért azt az értekezés nem tartalmazza. Ezen eredmény részletes bizonyítását egy későbbi, előkészületben lévő dolgozatban szeretnénk közölni.

4. Klasszikus kitűzésű megfigyelési problémák

A 4. Fejezetben klasszikus eszközöket alkalmazunk megfigyelési problémák vizsgálatára, s eközben a minél élesebb állítások megfogalmazásához felhasználjuk az előző fejezet eredményét. A fejezet fő tétele a következő:

4.5. Tétel. *Tekintsük az*

$$u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^2)$$

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad a > 0,$$

módon megadott húrrezgést, ahol $f(x,t)$ folytonos, és az f_t iránymenti derivált létezik és folytonos. A megfigyelt részleges állapotokat pedig a

$$\begin{aligned} A_1(x)u|_{t=t_1} + B_1(x)u_t|_{t=t_1} &= f_1(x), \qquad && x \in \mathbb{R}, \\ A_2(x)u|_{t=t_2} + B_2(x)u_t|_{t=t_2} &= f_2(x), \qquad && x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

feltételek írják le, ahol az adott együtthatókra és jobb oldalakra teljesül, hogy

$$A_1(x), A_2(x), B_1(x), B_2(x) \neq 0,\ x \in \mathbb{R}, \quad A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2,\ f_1,\ f_2 \in C^1(\mathbb{R}).$$

Az így kitűzött megfigyelési problémának létezik megoldása, azaz találhatóak olyan

$$u|_{t=t_0}(x) = \varphi(x), \quad u_t|_{t=t_0}(x) = \psi(x), \qquad \varphi \in C^2(\mathbb{R}),\ \psi \in C^1(\mathbb{R})$$

kezdeti függvények, amikkel indított húrrezgés során a megfigyelt állapotok előállnak. A megoldás nem egyértelmű.

Ez az eredmény a tükrözések módszerének segítségével félvégtelen rezgő húrokra is kiterjeszthető. Tekintsük a félvégtelen ($x \geq 0$) rezgő húr egyenletét:

$$u(x,t) \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R}), \tag{4.19}$$

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = g(x,t), \qquad (x,t) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}, \quad a > 0, \tag{4.20}$$

ahol

$$g(x,t) \in C([0,\infty) \times \mathbb{R}), \quad g_t(x,t) \in C([0,\infty) \times \mathbb{R}). \tag{4.21}$$

Legyen a végpont rögzített:

$$u(0,t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{4.22}$$

és legyenek a megfigyelt részleges állapotok a következőek:

$$u|_{t=t_1} = g_1(x), \quad u|_{t=t_2} = g_2(x), \qquad g_1, g_2 \in C^2([0,\infty)). \tag{4.23}$$

4.3. Tétel.

A (4.19)–(4.23) megfigyelési problémának létezik u megoldása minden olyan g_1, g_2 és g függvények esetén, amelyek teljesítik a következő illeszkedési feltételt:

$$g(0,t) = g_1(0) = g_1''(0) = g_2(0) = g_2''(0) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

A megoldás nem egyértelmű, viszont bármely u megoldás felírható a következő alakban:

$$u(x,t) = \frac{f_1(x-a(t-t_1)) + f_1(x+a(t-t_1))}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-a(t-t_1)}^{x+a(t-t_1)} \psi(s)ds +$$

$$+\frac{1}{2a} \int\limits_{t_1}^{t} \left(\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi \right) d\tau,$$

ahol a jobb oldalt megszorítjuk $x \geq 0$-ra. Az f_1 és f függvények a g_1 és g függvények páratlan kiterjesztései a valós számok halmazára az $x = 0$ pontra, illetve egyenesre nézve, a

$$\Psi(x) = \int\limits_0^x \psi(s)ds \in C^2(\mathbb{R})$$

függvény pedig tetszőlegesen választható a $[0,T]$ intervallumon belsejében.

Rögzített végpont helyett az

$$u_x(0,t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{4.26}$$

Neumann típusú peremfeltétel esetén páros kiterjesztéseket használva a következő eredményt nyerjük:

4.4. Tétel. *A* (4.19), (4.20), (4.21), (4.23), (4.26) *megfigyelési problémának létezik u megoldása minden olyan g_1 és g_2 függvények mellett, melyek kielégítik a következő illeszkedési feltételt:*

$$g_1'(0) = g_2'(0) = 0.$$

A megoldás nem egyértelmű, viszont felírható a következő alakban:

$$u(x,t) = \frac{f_1(x-a(t-t_1)) + f_1(x+a(t-t_1))}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-a(t-t_1)}^{x+a(t-t_1)} \psi(s)ds,$$

$$+\frac{1}{2a} \int\limits_{t_1}^{t} \left(\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi \right) d\tau,$$

ahol a jobb oldalt $x \geq 0$-ra tekintjük. Itt az f_1 függvény g_1, az $f(x,t)$ függvény pedig $g(x,t)$ páros kiterjesztése az $x = 0$ pontra, illetve egyenesre nézve. A

$$\Psi(x) = \int\limits_0^x \psi(s)ds \in C^2(\mathbb{R})$$

függvény tetszőlegesen választható a $[0,T]$ intervallum belsejében.

Hivatkozások

[1] Komornik, V., *Exact controllability and stabilization. The multiplier method*, Research in Applied Mathematics 36, Chichester: Wiley, Paris: Masson, 1994.

[2] Lions, J. L., Magenes, E., *Problèmes aux limites non homogenès et applications I-III*, Dunod, Paris, 1968–1970.

[3] Znamenskaya, L. N., *State observability of elastic string vibrations under the boundary conditions of the first kind*, Differential Equations, **46** (2010), 748–752.

[4] Egorov, A. I., *On the observability of elastic vibration of a beam*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **48**:6 (2008), 967–973.

[5] Komornik, V., Loreti, P., *Multiple-point internal observability of membranes and plates*, Applicable Analysis **90**:10 (2011), 1545–1555.

[6] Vest, A., *Observation of vibrating systems at different time instants*, E. J. Qualitative Theory of Differential Equations, **14** (2014), 1–14.

[7] Szijártó, A., Hegedűs, J., *Observation problems posed for the Klein-Gordon equation*, E. J. Qualitative Theory of Differential Equations, **7** (2012), 1–13.

[8] Szijártó, A., Hegedűs, J., *Observability of string vibrations*, E. J. Qualitative Theory of Differential Equations, **77** (2013), 1–16.

[9] Szijártó, A., Hegedűs, J., *Classical solutions to observation problems for infinite strings under minimally smooth force*, Acta Sci. Math., **81** (2015), 503-526.

[10] Szijártó, A., Hegedűs, J., *Vibrating infinite string under general observation conditions and minimally smooth force*, E. J. Qualitative Theory of Differential Equations, közlésre benyújtva